

第2章 | 極限



第1節 数列の極限

1 数列の極限

まとめ

1 無限数列

項が限りなく続く数列を 無限数列 という。

数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ を記号で $\{a_n\}$ と書くこともある。

a_1 が初項, a_n が第 n 項である。

2 収束, 極限, 極限值

一般に, 数列 $\{a_n\}$ において, n を限りなく大きくするとき, a_n がある値 α に限りなく近づくならば, $\{a_n\}$ は α に 収束 する, または, $\{a_n\}$ の 極限 は α であるという。また, 値 α を $\{a_n\}$ の 極限值 ともいう。

このことを, 次のように書き表す。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \quad \text{または} \quad n \rightarrow \infty \text{ のとき } a_n \rightarrow \alpha$$

例 数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ について, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ($n \rightarrow \infty$ のとき $\frac{1}{n} \rightarrow 0$)

注意 記号 ∞ は「無限大」と読む。 ∞ は, 値すなわち数を表すものではない。

3 発散

数列 $\{a_n\}$ が収束しないとき, $\{a_n\}$ は 発散 するという。

次のように3つの場合がある。 n を限りなく大きくするとき

[1] a_n の値が限りなく大きくなる場合, 数列 $\{a_n\}$ は 正の無限大に発散 する, または $\{a_n\}$ の 極限は正の無限大 であるという。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \text{または} \quad n \rightarrow \infty \text{ のとき } a_n \rightarrow \infty \quad \text{と書き表す。}$$

[2] a_n の値が負で, その絶対値が限りなく大きくなる場合, 数列 $\{a_n\}$ は 負の無限大に発散 する, または $\{a_n\}$ の 極限は負の無限大 であるという。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \quad \text{または} \quad n \rightarrow \infty \text{ のとき } a_n \rightarrow -\infty \quad \text{と書き表す。}$$

[3] 発散する数列が, 正の無限大にも負の無限大にも発散しない場合, 数列は 振動 するという。

4 数列の極限の性質(1)

数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が収束して, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ とする。

$$\text{①} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} k a_n = k \alpha \quad \text{ただし, } k \text{ は定数}$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \alpha - \beta$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \alpha \beta$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{ただし, } \beta \neq 0$$

注意 性質 $\textcircled{1} \sim \textcircled{4}$ は収束する数列について成り立つものである。

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ であるとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$$

数列 $\{a_n - b_n\}$, $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ は発散することも収束することもある。

5 数列の極限の性質(2)

数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が収束して, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ とする。

$$\textcircled{5} \quad \text{すべての } n \text{ について } a_n \leq b_n \text{ ならば } \alpha \leq \beta$$

$$\textcircled{6} \quad \text{すべての } n \text{ について } a_n \leq c_n \leq b_n \text{ かつ } \alpha = \beta \text{ ならば } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$$

また, 次のことも成り立つ。

$$\textcircled{7} \quad \text{すべての } n \text{ について } a_n \leq b_n \text{ のとき}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ ならば } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$$

補足 性質 $\textcircled{5}$ において, 常に $a_n < b_n$ でも, $\alpha = \beta$ の場合がある。

たとえば, $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, $b_n = 1 + \frac{1}{n}$ では常に $a_n < b_n$ であるが,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 \text{ である。}$$

性質 $\textcircled{6}$ を「はさみうちの原理」ということがある。

A 数列と極限

教 p.25

練習 1

次の数列の極限值をいえ。

$$(1) \quad \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots$$

$$(2) \quad -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots, \frac{(-1)^n}{n}, \dots$$

$$(3) \quad \cos \pi, \cos 3\pi, \cos 5\pi, \dots, \cos (2n-1)\pi, \dots$$

指針 数列の極限值 第 n 項を手がかりにする。(2)は, 各項の符号が負, 正, 負, ……と交互に変わりながら収束する。(1), (2)は, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ であることを使う。

解答 (1) $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ と表される。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ より } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \quad \text{答}$$

(2) n が奇数のとき $-\frac{1}{n}$, n が偶数のとき $\frac{1}{n}$

$n \rightarrow \infty$ のとき, とともに 0 に収束するから $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ 答

(3) $\cos(2n-1)\pi = \cos(-\pi) = -1$

よって, 数列 $\{\cos(2n-1)\pi\}$ は -1 が無限に続く数列である。

したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(2n-1)\pi = -1$ 答

注意 (1)~(3)は, それぞれ次のように表してもよい。

$$\frac{n+1}{n} \rightarrow 1, \quad \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0, \quad \cos(2n-1)\pi \rightarrow -1$$

(3) 1つの数 c が無限に続く数列 $c, c, c, \dots, c, \dots$ は c に収束し, その極限値は c である。

B 収束しない数列

教 p.26

練習
2

第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

$$(1) 2n \quad (2) -\frac{1}{n} \quad (3) -n^2 \quad (4) 1+(-1)^n$$

指針 数列の収束・発散 収束, 発散をまとめると, 次のようになる。

収束	値 α に収束	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$	……	極限は α
発散 (収束しない)	正の無限大に発散	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$	……	極限は ∞
	負の無限大に発散	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$	……	極限は $-\infty$
	振動		……	極限は ない

(2) 分子は一定で, 分母は限りなく大きくなる。

(3) 負の値をとり, 絶対値は限りなく大きくなる。

(4) $(-1)^n$ の部分は振動する。

解答 (1) n を限りなく大きくすると, $2n$ は限りなく大きくなるから $\lim_{n \rightarrow \infty} 2n = \infty$

よって, 正の無限大に発散し, 極限は ∞ 答

(2) n を限りなく大きくすると, $-\frac{1}{n}$ は 0 に限りなく近づくから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$$

よって, 0 に収束し, 極限は 0 答

(3) n を限りなく大きくすると, $-n^2$ は負でその絶対値は限りなく大きくなるから $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2) = -\infty$

よって, 負の無限大に発散し, 極限は $-\infty$ 答

(4) この数列は交互に 0, 2, 0, 2, ……となる。

よって、振動し、極限はない。 答

注意 極限が ∞ または $-\infty$ の場合、これらを数列の極限值とはいわない。

C 数列の極限の性質(1)

教 p.27

練習 3

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -2$ のとき、次の極限を求めよ。

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n + 2b_n)$ (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1)$
 (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n$ (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n + 5}{2a_n - 1}$ (6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - b_n}{a_n + b_n}$

指針 数列の極限の性質 まとめの 4 の性質①~④を使って極限を求める。

- (2) 性質①より、 $\{3a_n\}, \{2b_n\}$ とも収束するから、性質②が使える。
 (3) $\{a_n\}$ と $\{1\}$ の差の極限と考える。数列 $\{1\}$ の極限值は 1 である。
 (5) 分母、分子とも (3) と同様に収束するから、性質④が使える。

解答 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 - (-2) = 3$ 答

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n + 2b_n) = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) = -1$ 答

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 - 1 = 0$ 答

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 \cdot (-2) = -2$ 答

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n + 5}{2a_n - 1} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n + 5)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - 1)} = \frac{-2 + 5}{2 \cdot 1 - 1} = 3$ 答

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - b_n}{a_n + b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)} = \frac{1 - (-2)}{1 + (-2)} = -3$ 答

練習 4

次の極限を求めよ。

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n^3 - n^2)$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - 3n^2)$ (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n - n^3)$
 (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{3n - 2}$ (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 1}{n^2 + 3}$ (6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n}{2n + 1}$

指針 数列の極限の計算 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ がともに発散するとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ はいろいろな場合がある。

(1)~(3) は次数の最も高い項をくくり出し、積の形にして極限を調べる。(4)~(6) の極限を調べるには、分母、分子を分母の最高次の項で割り、分母がある値に収束する形を作る。

解答 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n^3 - n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(2 - \frac{1}{n} \right) = \infty$ 答

$$\leftarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 = \infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n} \right) = 2 \end{cases}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (n - 3n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{1}{n} - 3 \right) = -\infty \quad \text{答}$$

$$\leftarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - 3 \right) = -3 \end{cases}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} (2n - n^3) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\frac{2}{n^2} - 1 \right) = -\infty \quad \text{答}$$

$$\leftarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 = \infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n^2} - 1 \right) = -1 \end{cases}$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{2}{n}} = \frac{2}{3} \quad \text{答}$$

$$\leftarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{n^2+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \frac{4 - \frac{1}{n}}{n}}{1 + \frac{3}{n^2}} = 0 \quad \text{答}$$

$$\leftarrow \text{分母} \rightarrow 1, \text{分子} \rightarrow 0$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-2n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-2}{2 + \frac{1}{n}} = \infty \quad \text{答}$$

$$\leftarrow \text{分母} \rightarrow 2, \text{分子} \rightarrow \infty$$

注意 ∞ を安易に考えてはならない。 $\frac{\infty}{\infty}$ になるから 1, $\infty - \infty$ であるから 0 とするのは誤りである。

深める

教 p.28

p を整数とすると、数列 $\left\{ \frac{n^3+2n}{n^p} \right\}$ の極限が p の値によってどのように変化するか調べてみよう。

指針 数列の極限の計算 数列の一般項の分子が 3 次式であるから、 $p=3$ を境にして場合分けする。

解答 $p \geq 4$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+2n}{n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^{p-3}} + \frac{2}{n^{p-1}} \right) = 0$

$p=3$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+2n}{n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+2n}{n^3}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n^2} \right) = 1$

$p \leq 2$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+2n}{n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^{3-p} + 2n^{1-p}) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{3-p} (1 + 2n^{-2})$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{3-p} \left(1 + \frac{2}{n^2} \right) = \infty$

よって、この数列の極限は、 $p \geq 4$ のとき 0, $p=3$ のとき 1, $p \leq 2$ のとき ∞ である。 **答**

練習
5

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - n} - n)$

指針 数列の極限の計算 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がともに発散する場合でも、数列 $\{a_n - b_n\}$ は収束することがあるという例である。

第 n 項が $\sqrt{\quad} - \sqrt{\quad}$ の形で表されているとき、分母を 1 とした分数と考え、分母、分子に $\sqrt{\quad} + \sqrt{\quad}$ を掛けて、分子を有理化する。

これで、(1) は分子が定数になる。(2) はさらに n で約分すると分子が定数になる。あとは分母の極限を考えればよい。

解答 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) - n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = 0 \quad \text{答}$$

← 分子 2, 分母 $\rightarrow \infty$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - n} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 - n} - n)(\sqrt{n^2 - n} + n)}{\sqrt{n^2 - n} + n}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 - n) - n^2}{\sqrt{n^2 - n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{\sqrt{n^2 - n} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{n\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + 1} = -\frac{1}{2} \quad \text{答}$$

← 分子 -1, 分母 $\rightarrow 2$

注意 (2) $n \geq 1$ としてよいから

$$\sqrt{n^2 - n} = \sqrt{n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)} = n\sqrt{1 - \frac{1}{n}}$$

$A = \frac{A}{1}$ と考えて分子を有理化すればいいんだね。



D 数列の極限の性質(2)

練習
6

θ を定数とするととき、次の極限を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\theta}{6}$$

指針 はさみうちの原理 $\cos \frac{n\theta}{6}$ の値は周期的に変わるが、値域は -1 以上 1 以下であるから、はさみうちの原理が利用できる。

解答 $-1 \leq \cos \frac{n\theta}{6} \leq 1$ より

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \cos \frac{n\theta}{6} \leq \frac{1}{n}$$

ここで, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\theta}{6} = 0 \quad \square$$



$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ であることを, $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$ が成り立つことを利用して示してみよう。

指針 数列の極限と絶対値 はさみうちの原理を利用する。

解答 $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$ であり, $\lim_{n \rightarrow \infty} (-|a_n|) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$

であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 終

教 p.30

2 無限等比数列

まとめ

1 無限等比数列

項が無限に続く等比数列を 無限等比数列 という。

2 数列 $\{r^n\}$ の極限

初項 r , 公比 r の無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限

$$\left. \begin{array}{ll} r > 1 \text{ のとき} & \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty \\ r = 1 \text{ のとき} & \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1 \\ |r| < 1 \text{ のとき} & \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 \\ r \leq -1 \text{ のとき} & \text{振動する} \cdots \cdots \text{極限はない} \end{array} \right\} \text{収束する}$$

3 数列 $\{r^n\}$ の極限の応用

数列 $\{r^n\}$ が収束するための必要十分条件は, $-1 < r \leq 1$ である。

注意 $-1 < r < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$, $r = 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$

4 漸化式で表された数列の極限

$p \neq 0$, 1 のとき, 漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ は $\alpha = p\alpha + q$ を満たす α を用いて, $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ の形に変形できる。数列 $\{a_n - \alpha\}$ が等比数列であることから一般項 a_n を n の式で表し, 上の 2 を用いると $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が求められる。

A 数列 $\{r^n\}$ の極限

教 p.32

練習
7第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

$$(1) (\sqrt{3})^n \quad (2) \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad (3) \left(-\frac{4}{3}\right)^n \quad (4) 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$$

指針 数列 $\{r^n\}$ の極限 まとめの 2 を用いて, r の値によって極限を判断する。解答 (1) $\sqrt{3} > 1$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3})^n = \infty$ 答(2) $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ 答(3) $-\frac{4}{3} < -1$ であるから 極限はない(振動する) 答(4) $2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| < 1$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0 \quad \text{すなわち} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} = 0 \quad \text{答}$$

B 数列 $\{r^n\}$ の極限の応用

教 p.32

練習
8数列 $\{(x-1)^n\}$ が収束するような x の値の範囲を求めよ。また、そのときの極限值を求めよ。指針 無限等比数列 $\{r^n\}$ の収束条件 数列 $\{r^n\}$ の収束条件は $-1 < r \leq 1$ でよいが, さらに極限值を求めるには, $-1 < r < 1$, $r = 1$ の 2 つの場合に分けて調べる必要がある。本問では, $r = x - 1$ である。解答 数列 $\{(x-1)^n\}$ が収束するための必要十分条件は

$$-1 < x - 1 \leq 1 \quad \text{すなわち} \quad 0 < x \leq 2 \quad \text{答}$$

また, 極限值は, $0 < x < 2$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} (x-1)^n = 0$ $\leftarrow -1 < x-1 < 1$ $x = 2$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} (x-1)^n = 1$ 答 $\leftarrow x-1 = 1$ 練習
9

教 p.33

次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 2^n}{5^n + 2^n} \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 2^n}{3^n} \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{3^n - 2^n}$$

指針 数列の極限の計算 分母, 分子はそれぞれ発散するが, 分数式としては収束することがある。手順は, 練習 4 の (4)~(6) と同様で, 分母にある項のうち底の絶対値が最大である項で分母と分子を割り, 分母が収束する形を作る。いくつか r^n の形ができるが, それぞれの収束, 発散を r の値で判断する。(1) は分母と分子を 5^n で割り, (2), (3) は 3^n で割る。

$$\begin{aligned}
 \text{解答 (1)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 2^n}{5^n + 2^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n} = 1 \quad \boxed{\text{答}} &< \begin{cases} \text{分子} \rightarrow 1 \\ \text{分母} \rightarrow 1 \end{cases} \\
 \text{(2)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 2^n}{3^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{4}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\} = \infty \quad \boxed{\text{答}} &< \begin{cases} \left(\frac{4}{3}\right)^n \rightarrow \infty \\ \left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0 \end{cases} \\
 \text{(3)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{3^n - 2^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n} = 0 \quad \boxed{\text{答}} &< \begin{cases} \text{分子} \rightarrow 0 \\ \text{分母} \rightarrow 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

教 p.33

練習
10

数列 $\left\{ \frac{1-r^n}{1+r^n} \right\}$ の極限を、次の各場合について求めよ。

- (1) $r > 1$ (2) $r = 1$ (3) $|r| < 1$ (4) $r < -1$

指針 r^n を含む数列の極限

- (2) $r=1$, (3) $|r| < 1$ のとき、分母、分子はともに収束する。
 (1) $r > 1$, (4) $r < -1$ のとき、分母、分子はともに収束しない。練習 9 と同様に考え、まず分母と分子を r^n で割り、分母が収束する形を作る。

解答 (1) $r > 1$ のとき、 $\left| \frac{1}{r} \right| < 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r} \right)^n = 0$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r^n}{1+r^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{r}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{r}\right)^n + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1 \quad \boxed{\text{答}}$$

- (2) $r=1$ のとき、 $r^n=1$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r^n}{1+r^n} = \frac{1-1}{1+1} = 0 \quad \boxed{\text{答}}$$

- (3) $|r| < 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r^n}{1+r^n} = \frac{1-0}{1+0} = 1 \quad \boxed{\text{答}}$

- (4) $r < -1$ のとき、 $\left| \frac{1}{r} \right| < 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r} \right)^n = 0$ であるから、(1) と同様にして

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r^n}{1+r^n} = -1 \quad \boxed{\text{答}}$$

C 漸化式で表された数列の極限

教 p.34

練習
11次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

$$a_1=1, a_{n+1}=-\frac{1}{3}a_n+1 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

2
章極
限

指針 漸化式で表された数列の極限 漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ ($p \neq 0, 1$) は $\alpha=p\alpha+q$ を満たす α を用いて, $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ の形に変形する。次に, 数列 $\{a_n-\alpha\}$ が等比数列であることを利用して, 一般項 a_n を求める。

解答 与えられた漸化式を変形すると

$$a_{n+1}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{3}\left(a_n-\frac{3}{4}\right) \quad \leftarrow \alpha=-\frac{1}{3}\alpha+1 \text{ を}$$

よって, 数列 $\left\{a_n-\frac{3}{4}\right\}$ は公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列である。解くと $\alpha=\frac{3}{4}$

その初項は, $a_1-\frac{3}{4}=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ であるから $a_n-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$$\text{すなわち} \quad a_n=\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{3}{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0 \text{ であるから} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{4} \quad \text{答} \quad \leftarrow |r| < 1$$

参考 もし, 極限値の存在が保証されているならば, 漸化式から極限値を求めることもできる。たとえば, 本問の場合, 極限値が存在するとして, それを α とおけば, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ より, $\alpha = -\frac{1}{3}\alpha + 1$ が成り立ち, $\alpha = \frac{3}{4}$ が求まる。

3 無限級数

まとめ

1 無限級数

無限数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ の各項を順に $+$ の記号で結んだ式

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad ①$$

を 無限級数 という。この式を $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と書き表すこともある。

a_1 をその 初項, a_n を 第 n 項 という。

2 部分和

無限数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n で表す。

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

この S_n を無限級数 ① の第 n 項までの 部分和 という。

3 無限級数の収束

部分和 S_n を第 n 項として, 新たに無限数列 $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$

を作る。無限数列 $\{S_n\}$ が収束してその極限値が S のとき, すなわち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = S \quad \text{となるとき, 無限級数 ① は } S \text{ に 収束 する, または}$$

無限級数 ① の 和 は S であるという。

この和 S も $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ で書き表すことがある。

4 無限級数の和

無限級数 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ の第 n 項までの部分 and S_n から作られる

無限数列 $\{S_n\}$ が S に収束するとき, この無限級数の和は S である。

5 無限級数の発散

無限数列 $\{S_n\}$ が発散するとき, 無限級数 ① は 発散 するという。

6 無限等比級数

初項が a , 公比が r の無限等比数列から作られる無限級数

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots \quad ②$$

を, 初項 a , 公比 r の 無限等比級数 という。

7 無限等比級数の収束・発散

無限等比級数 ② において

$a \neq 0$ のとき $|r| < 1$ ならば収束し, その和は $\frac{a}{1-r}$ である。

$|r| \geq 1$ ならば発散する。

$a = 0$ のとき 収束し, その和は 0 である。

8 循環小数と無限等比級数

無限等比級数の考えを用いることで, 循環小数を分数に直すことができる。

9 無限級数の性質

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束して、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$ とする。

$$\text{① } \sum_{n=1}^{\infty} k a_n = k S \quad \text{ただし, } k \text{ は定数}$$

$$\text{② } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = S + T, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = S - T$$

10 無限級数の収束・発散と項の極限

$$\text{① } \text{無限級数 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ が収束する} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\text{② } \text{数列 } \{a_n\} \text{ が } 0 \text{ に収束しない} \implies \text{無限級数 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ は発散する}$$

注意 ①, ②の逆は成り立たない。たとえば, 教科書 p.36 例題 5 の無限級数

$$\text{について, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0 \text{ であるが, 無限級数は発散する。}$$

A 無限級数の収束・発散

教 p.36

練習
12

次の無限級数の収束, 発散を調べ, 収束するときはその和を求めよ。

$$(1) \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}} + \cdots$$

指針 無限級数の収束・和, 発散 無限級数の収束・発散は次の手順で調べる。

① 初項から第 n 項までの部分 and S_n を n の式で表す。

② 無限数列 $\{S_n\}$ の収束, 発散を調べる。

ここで, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が収束して極限値 S をもてば, もとの無限級数は収束し, その和は S である。また発散すれば, 無限級数も発散する。

(1) S_n を求めるには, 各項を分数の差に分解して計算する。

$$\text{一般に, } k \neq 0 \text{ のとき } \frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right)$$

この n を $2n-1$, k を 2 としたものがこの問題である。

(2) S_n を求めるには, 各項の分母を有理化してから計算する。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} &= \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}) \end{aligned}$$

解答 (1) 一般に、 $\frac{1}{x(x+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right)$ が成り立つ。

この式において、 $x=2n-1$ とすると

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

したがって、この無限級数は収束する。 答

その和は $\frac{1}{2}$ 答

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} &= \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}) \end{aligned}$$

第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}} \\ &= \frac{1}{2} \{ (\sqrt{3}-1) + (\sqrt{5}-\sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}) \} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1) \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1) = \infty$$

したがって、この無限級数は発散する。 答

注意 無限級数の和は、部分和の数列 $\{S_n\}$ の極限值として定義される。 S_n を求めることを怠ってはならない。上の S_n の計算で、() をはずして交換法則、結合法則が利用できるのも有限個の和だからである。

たとえば、無限級数 $1-1+1-1+\cdots$ は、数列 $\{S_n\}$ の項に 1 と 0 が交互に現れるから発散(振動)する。これを $(1-1)+(1-1)+\cdots=0$ としては誤りである。

B 無限等比級数

教 p.38

練習
13

次のような無限等比級数の収束、発散を調べ、収束するときはその和を求めよ。

- (1) 初項 1, 公比 $\frac{1}{2}$ (2) 初項 $\sqrt{2}$, 公比 $-\sqrt{2}$
 (3) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \dots$ (4) $(\sqrt{2} + 1) + 1 + (\sqrt{2} - 1) + \dots$

指針 無限等比級数の収束・発散 無限級数であるから、本来ならば部分和の数列 $\{S_n\}$ を作って収束、発散を調べなければならない。しかし、無限等比級数の場合、その初項 a と公比 r の値により簡便に判断できる。また、収束するときの和も簡単な公式で求められる。 $a \neq 0$ のとき $|r| < 1$ ならば収束し、その和は $\frac{a}{1-r}$ 、 $|r| \geq 1$ ならば発散する。

解答 (1) 初項が 1, 公比について $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ であるから 収束 する。 答

$$\text{その和は } \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \quad \text{答} \quad \leftarrow \frac{a}{1-r}$$

(2) 初項が $\sqrt{2}$, 公比について $|-\sqrt{2}| > 1$ であるから 発散 する。 答

(3) 初項が 1, 公比について $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$ であるから 収束 する。 答

$$\text{その和は } \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4} \quad \text{答}$$

(4) 初項が $\sqrt{2} + 1$, 公比について $|\sqrt{2} - 1| < 1$ であるから 収束 する。 答

$$\text{その和は } \frac{\sqrt{2} + 1}{1 - (\sqrt{2} - 1)} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - \sqrt{2}} = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{2} \quad \text{答}$$

練習
14

教 p.38

次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲を求めよ。

- (1) $1 + (2-x) + (2-x)^2 + \dots$
 (2) $x + x(2-x) + x(2-x)^2 + \dots$

指針 無限等比級数の収束条件 初項 a , 公比 r の無限等比級数が収束するための必要十分条件は

$$a = 0 \quad \text{または} \quad |r| < 1$$

である。(1) は、初項 $\neq 0$ であるから公比のみの条件で済むが、(2) については、初項と公比の両方について調べなければならない。

解答 (1) 初項 1, 公比が $2-x$ であるから、この無限等比級数が収束するための必

要十分条件は $|2-x|<1$

よって $-1<2-x<1$ すなわち $1<x<3$ 答

(2) 初項が x , 公比が $2-x$ であるから, この無限等比級数が収束するための

必要十分条件は $x=0$ または $|2-x|<1$

$|2-x|<1$ のとき $-1<2-x<1$ すなわち $1<x<3$

よって, 求める x の値の範囲は $x=0, 1<x<3$ 答

注意 数列 $\{r^n\}$ が収束するための必要十分条件は $-1<r\leq 1$

無限等比級数 $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$ が収束するための必要十分条件

は $a=0$ または $|r|<1$

$a\neq 0$ かつ $|r|\geq 1$ では発散する。

C 点の運動と無限等比級数

教 p.39

練習
15

数直線上で, 点 P が原点 O から正の向きに 1 だけ進み, そこから負の向きに $\frac{1}{2^2}$, そこから正の向きに $\frac{1}{2^4}$, そこから負の向きに $\frac{1}{2^6}$ と進む。以下, このような運動を限りなく続けるとき, 点 P が近づいていく点の座標を求めよ。

指針 点の運動と無限等比級数 点 P の座標を順に表していくと, 点 P が近づいていく点の座標は無限等比級数で表されることがわかる。

解答 点 P の座標は, 順に次のようになる。

$$1, \quad 1-\frac{1}{2^2}, \quad 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}, \quad 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^6}, \quad \cdots$$

よって, 点 P が近づいていく点の座標は, 初項 1, 公比 $-\frac{1}{2^2}$ の無限等比級数で表される。

公比について $\left|-\frac{1}{2^2}\right|<1$ であるから, この無限等比級数は収束して,

$$\text{その和は} \quad \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2^2}\right)} = \frac{4}{5} \quad \leftarrow \frac{a}{1-r}$$

したがって, 点 P が近づいていく点の座標は $\frac{4}{5}$ 答

D 循環小数と無限等比級数

教 p.40

練習
16

次の循環小数を分数で表せ。

(1) $0.\dot{6}$

(2) $0.2\dot{3}4$

(3) $0.4\dot{7}0\dot{2}$

指針 循環小数と無限等比級数 無限等比級数の考えを用いることで、循環小数を分数に直すことができる。

解答 (1) $0.\dot{6} = 0.6 + 0.06 + 0.006 + \dots$

これは、初項 0.6、公比 0.1 の無限等比級数で、 $|0.1| < 1$ であるから、収束して

$$0.\dot{6} = \frac{0.6}{1-0.1} = \frac{0.6}{0.9} = \frac{2}{3} \quad \text{答}$$

(2) $0.2\dot{3}4 = 0.2 + 0.034 + 0.00034 + 0.000034 + \dots$

第 2 項以下は、初項 0.034、公比 0.01 の無限等比級数で、 $|0.01| < 1$ であるから、収束して

$$\begin{aligned} 0.2\dot{3}4 &= 0.2 + \frac{0.034}{1-0.01} = \frac{2}{10} + \frac{0.034}{0.99} \\ &= \frac{2}{10} + \frac{34}{990} = \frac{1}{5} + \frac{17}{495} = \frac{116}{495} \quad \text{答} \end{aligned}$$

(3) $0.4\dot{7}0\dot{2} = 0.4 + 0.0702 + 0.000702 + \dots$

第 2 項以下は、初項 0.0702、公比 0.001 の無限等比級数で、 $|0.001| < 1$ であるから、収束して

$$\begin{aligned} 0.4\dot{7}0\dot{2} &= 0.4 + \frac{0.0702}{1-0.001} = \frac{4}{10} + \frac{0.0702}{0.999} = \frac{4}{10} + \frac{702}{9990} \\ &= \frac{2}{5} + \frac{13}{185} = \frac{87}{185} \quad \text{答} \end{aligned}$$

コラム $0.9999\cdots = 1$

教 p.40

練習

無限等比級数を利用して、 $0.9999\cdots = 1$ であることを確かめよう。

指針 無限等比級数の利用 $0.9999\cdots = 0.9 + 0.09 + 0.009 + 0.0009 + \dots$
であることを利用する。

解答 $0.9999\cdots = 0.9 + 0.09 + 0.009 + 0.0009 + \dots$

右辺は、初項 0.9、公比 0.1 の無限等比級数となる。

公比について、 $|0.1| < 1$ であるから、この無限等比級数は収束して

$$0.9999\cdots = \frac{0.9}{1-0.1} = 1 \quad \text{終}$$

E 無限級数の性質

教 p.41

練習
17

次の無限級数の和を求めよ。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^n} + \frac{2}{3^n} \right)$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3^n}{4^n}$

指針 無限級数の性質 (1) は $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + kb_n)$ の形, (2) は $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ の形になる。

まとめの 9 の性質 [1], [2] は無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ がともに収束するならば, それぞれ

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + kb_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + k \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

として計算してよいことを示している。

本問では, 右辺の無限級数はいずれも無限等比級数となるから, 収束するかどうかは |公比| < 1 を確かめればよく, それぞれの和も公式を使って簡単に求めることができる。

解答 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ は, 初項 $\frac{1}{4}$, 公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比級数であり,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$ は, 初項 $\frac{2}{3}$, 公比 $\frac{1}{3}$ の無限等比級数である。

公比について, $\left| \frac{1}{4} \right| < 1$, $\left| \frac{1}{3} \right| < 1$ であるから, これらの無限等比級数はともに収束して, それぞれの和は $\leftarrow |r| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 1 \quad \leftarrow \frac{a}{1-r}$$

よって $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^n} + \frac{2}{3^n} \right) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$ [答] $\leftarrow$ 無限級数の性質

$$(2) \frac{2^n - 3^n}{4^n} = \frac{2^n}{4^n} - \frac{3^n}{4^n} = \left(\frac{1}{2} \right)^n - \left(\frac{3}{4} \right)^n$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n$ は, 初項 $\frac{1}{2}$, 公比 $\frac{1}{2}$ の無限等比級数であり,

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n$ は, 初項 $\frac{3}{4}$, 公比 $\frac{3}{4}$ の無限等比級数である。

公比について, $\left| \frac{1}{2} \right| < 1$, $\left| \frac{3}{4} \right| < 1$ であるから, これらの無限等比級数はともに収束して, それぞれの和は $\leftarrow |r| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} = 3$$

$$\leftarrow \frac{a}{1-r}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3^n}{4^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{3}{4}\right)^n \right\} \\ &= 1 - 3 = -2 \quad \boxed{\text{答}} \end{aligned}$$

← 無限級数の性質

2章

極限

F 無限級数の収束・発散と項の極限

教 p.42

練習

18

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot (2n-1)$ は発散することを示せ。

指針 無限級数の発散 第 n 項 a_n を $a_n = (-1)^{n-1} \cdot (2n-1)$ とする。

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ を示して、まとのめ **10** の **2** を利用する。

解答 第 n 項を a_n とすると $a_n = (-1)^{n-1} \cdot (2n-1)$

$n \rightarrow \infty$ のとき数列 $\{a_n\}$ は発散するから、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot (2n-1)$ は発

散する。 $\boxed{\text{終}}$

第2章 第1節

問 題

教 p.43

1 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n})$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-n} - n}$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^{n+1}}{2^{2n} - 3^n}$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n-1} - 2^n}{3^n + (-2)^n}$

指針 数列の極限 一般項が発散する数列を組み合わせた形になっている数列について、収束，発散を調べる。

(1) 分母を1とした分数と考えて，分子を有理化する。

(2) 分母を有理化する。

(3), (4) 分母が収束する形を作る。(3)は 2^{2n} ，(4)は 3^n (分母で，底の絶対値が大きい方の項)で割る。解答 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n})$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n})(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n})}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+n) - (n^2-n)}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}} = 1 \quad \text{答}$$

$$\leftarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-n} - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2-n} + n}{(\sqrt{n^2-n} - n)(\sqrt{n^2-n} + n)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2-n} + n}{(n^2-n) - n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2-n} + n}{-n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{n}} + 1}{-1} = -2 \quad \text{答}$$

$$\leftarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^{n+1}}{2^{2n} - 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{2^2}\right)^n + 4 \cdot \left(\frac{4}{2^2}\right)^n}{1 - \left(\frac{3}{2^2}\right)^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 4}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n} = 4 \quad \text{答}$$

$$\leftarrow \begin{cases} \text{分子} \rightarrow 4 \\ \text{分母} \rightarrow 1 \end{cases}$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n-1} - 2^n}{3^n + (-2)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{1}{3} \quad \text{答}$$

$$\leftarrow \begin{cases} \text{分子} \rightarrow \frac{1}{3} \\ \text{分母} \rightarrow 1 \end{cases}$$

2 数列 $\left\{ \frac{r^{2n}-1}{r^{2n}+1} \right\}$ の極限を、次の各場合について求めよ。

- (1) $|r| < 1$ (2) $|r| = 1$ (3) $|r| > 1$

指針 r^{2n} を含む数列の極限

(1), (2) 分母, 分子はともに収束する。

(3) 分母, 分子を r^{2n} で割り, 分母が収束する形を作る。

解答 (1) $|r| < 1$ のとき, $0 \leq r^2 < 1$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (r^2)^n = 0$

$$\text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n}-1}{r^{2n}+1} = \frac{0-1}{0+1} = -1 \quad \boxed{\text{答}}$$

(2) $|r| = 1$ のとき, $r^2 = 1$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (r^2)^n = 1$

$$\text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n}-1}{r^{2n}+1} = \frac{1-1}{1+1} = 0 \quad \boxed{\text{答}}$$

(3) $|r| > 1$ のとき, $0 < \frac{1}{r^2} < 1$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r^2} \right)^n = 0$$

$$\text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n}-1}{r^{2n}+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{r^{2n}}}{1 + \frac{1}{r^{2n}}} = \frac{1-0}{1+0} = 1 \quad \boxed{\text{答}}$$

3 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

指針 数列の漸化式と極限 まず, 漸化式から一般項 a_n を求める。

一般に, $a_{n+1} = pa_n + q$ ($p \neq 0, 1$) は方程式 $x = px + q$ の解を $x = \alpha$ とすると

$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ と変形できる。

$x = 2x + 1$ の解は $x = -1$ であるから, $a_{n+1} - (-1) = 2\{a_n - (-1)\}$ と変形できる。

解答 与えられた漸化式を変形すると

$$a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$$

よって, 数列 $\{a_n + 1\}$ は公比 2 の等比数列である。

その初項は, $a_1 + 1 = 1 + 1 = 2$ であるから

$$a_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n \quad \text{すなわち} \quad a_n = 2^n - 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty \text{ であるから} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \boxed{\text{答}}$$

- 4 次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲を求めよ。また、そのときの和を求めよ。

$$x + x(1-x)^2 + x(1-x)^4 + x(1-x)^6 + \cdots$$

指針 無限等比級数の収束条件 初項が x であるから、 $x=0$ と $x \neq 0$ で場合分けをする。 $x \neq 0$ のとき、公比 r を求めて、 $|r| < 1$ を満たす x の値の範囲を不等式を解いて求める。

解答 初項は x 、公比は $(1-x)^2$ である。

[1] $x=0$ のとき、この無限等比級数は収束する。

[2] $x \neq 0$ のとき、収束するための条件は $(1-x)^2 < 1$

整理すると $x(x-2) < 0$ ゆえに $0 < x < 2$

[1], [2] より、求める x の値の範囲は

$$0 \leq x < 2 \quad \text{答}$$

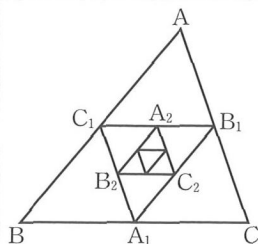
この無限等比級数が収束するとき、その和を S とすると

[1] のとき $S=0$

$$[2] \text{ のとき } S = \frac{x}{1-(1-x)^2} = \frac{x}{2x-x^2} = \frac{1}{2-x}$$

よって、和は $x=0$ のとき 0 、 $0 < x < 2$ のとき $\frac{1}{2-x}$ 答

- 5 面積 a の $\triangle ABC$ がある。右の図のように、その各辺の中点を結んで $\triangle A_1B_1C_1$ を作り、次に $\triangle A_1B_1C_1$ の各辺の中点を結んで $\triangle A_2B_2C_2$ を作る。このようにして無数の三角形 $\triangle A_1B_1C_1$ 、 $\triangle A_2B_2C_2$ 、 $\triangle A_3B_3C_3$ 、 $\cdots$ 、 $\triangle A_nB_nC_n$ 、 $\cdots$ を作るとき、これらの面積の和 S を求めよ。



指針 相似な図形と無限等比級数 もとの三角形の中点を結ぶと、中点連結定理により $B_1C_1 = \frac{1}{2}BC$ 、 $C_1A_1 = \frac{1}{2}CA$ 、 $A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$ である。

したがって、新しく作られる $\triangle A_1B_1C_1$ は $\triangle ABC$ と相似で、相似比は $1:2$ である。同様に、順次、相似比 $1:2$ の新しい三角形ができていく。

解答 $\triangle A_1B_1C_1$ と $\triangle ABC$ は相似で、相似比は $1:2$ である。同様に、 $\triangle A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ と $\triangle A_nB_nC_n$ は相似で、相似比は $1:2$ である。相似比が $1:2$ のとき、面積の比は $1^2:2^2=1:4$ であるから、 $\triangle A_nB_nC_n$ の面積を S_n とすると

$$S_1 = \frac{1}{4}a, \quad S_2 = \frac{1}{4}S_1, \quad S_3 = \frac{1}{4}S_2, \quad \dots$$

よって、 $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n + \dots$ は、初項 $\frac{1}{4}a$ 、公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比級数である。

公比について $\left| \frac{1}{4} \right| < 1$ であるから、この無限等比級数は収束する。

$$\text{したがって、求める和 } S \text{ は } S = \frac{\frac{1}{4}a}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}a \quad \text{答} \quad \leftarrow \frac{a}{1-r}$$

教 p.43

6 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について、次の命題の真偽を調べ、真である場合には証明し、偽である場合には反例をあげよ。ただし、 α は定数とする。

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ ならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$ である。
 (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ ならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$ である。

指針 数列の極限の性質

- (1) $a_n b_n$ が定数となるときや $a_n b_n$ が n の 1 次式になるときがある。
 (2) $b_n = a_n - (a_n - b_n)$ として考える。

解答 (1) 偽

(反例) $a_n = n$, $b_n = \frac{1}{n}$ とすると、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ であるが

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \quad \text{終}$$

(2) 真

$$\begin{aligned} \text{(証明)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n - (a_n - b_n)\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \alpha - 0 = \alpha \quad \text{終} \end{aligned}$$

コラム フラクタル図形

教 p.44

練習

1 辺の長さが 1 の正三角形に、教科書 44 ページの操作 (＊) を n 回繰り返したときに得られる図形を A_n とします。 $n \rightarrow \infty$ のとき、図形 A_n の面積は収束するが周の長さは発散する、すなわち、面積は有限であるにもかかわらず、周の長さは無限大であるという、不思議な性質があることが知られています。このことを確かめてみよう。

指針 フラクタル図形の面積と周の長さ 図形 A_n の辺の数を求め、それをもとにして面積と周の長さを求める。

解答 図形 A_n の辺の数を E_n 、面積を S_n 、周の長さを L_n とする。

n を 0 以上の整数とする。図形 A_0 を 1 辺の長さが 1 の正三角形とすると

$$E_0 = 3, S_0 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}, L_0 = 3$$

操作 (＊) を 1 回行うと、辺の長さは $\frac{1}{3}$ 倍になり、辺の数は 4 倍になるから、

$n \geq 1$ のとき操作 (＊) を n 回繰り返してできる図形 A_n の 1 辺の長さは

$$1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

また、辺の数 E_n は $E_n = E_0 \cdot 4^n = 3 \cdot 4^n$

これらは $n=0$ のときも成り立つ。

よって、図形 A_n から図形 A_{n+1} を作る時に加わる正三角形の面積の和は

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \times \sin \frac{\pi}{3} \times E_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 \cdot 4^n = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

$$\text{よって} \quad S_{n+1} = S_n + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

ゆえに、 $n \geq 1$ のとき

$$S_n = S_0 + \frac{\sqrt{3}}{12} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{4}{9}\right)^k = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} \left\{ 1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n \right\}$$

$$\text{したがって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

$$\text{一方、} L_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot E_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n \text{ であるから} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \infty$$

以上より、図形 A_n の面積は収束するが、周の長さは発散する。 終

第2節 関数の極限

4 関数の極限(1)

まとめ

2章

極限

1 関数の極限

関数 $f(x)$ において、 x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき、 $f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば、この値 α を $x \rightarrow a$ のときの $f(x)$ の 極限值 または 極限 という。また、 $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ は α に 収束 するともいい、次のように書き表す。

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha \quad \text{または} \quad x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \rightarrow \alpha$$

2 関数の極限の性質(1)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta \text{ とする。}$$

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow a} kf(x) = k\alpha \quad \text{ただし、} k \text{ は定数}$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \alpha + \beta, \quad \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - g(x)\} = \alpha - \beta$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \alpha\beta$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{ただし、} \beta \neq 0$$

注意 x の多項式で表される関数や分数関数、無理関数、三角関数、指数関数、対数関数などについては、 a が関数 $f(x)$ の定義域内の値であれば、等式 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ が成り立つ。

3 正の無限大に発散、負の無限大に発散

関数 $f(x)$ において、 x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき、 $f(x)$ の値が限りなく大きくなるならば、

$x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ は 正の無限大に発散 する

または $x \rightarrow a$ のときの $f(x)$ の 極限は ∞ であるといい、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad \text{または} \quad x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \rightarrow \infty \text{ と書き表す。}$$

また、 $f(x)$ の値が負で、その絶対値が限りなく大きくなるならば、

$x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ は 負の無限大に発散 する

または $x \rightarrow a$ のときの $f(x)$ の 極限は $-\infty$ であるといい、

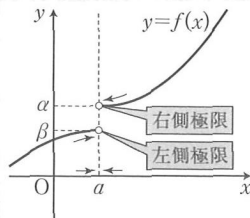
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \quad \text{または} \quad x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \rightarrow -\infty \text{ と書き表す。}$$

注意 極限が ∞ または $-\infty$ の場合、これらに関数の極限值とはいわない。

4 右側極限と左側極限

$x > a$ の範囲で x が a に限りなく近づくとき、 $f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば、 α を x が a に近づくときの $f(x)$ の 右側極限 といい、 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \alpha$ と書き表す。

$x < a$ の範囲で x が a に限りなく近づくときの 左側極限 も同様に定義され、その極限値が β のとき、 $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \beta$ と書き表す。



注意 ① $a=0$ のときは、 $x \rightarrow a+0$, $x \rightarrow a-0$ をそれぞれ $x \rightarrow +0$, $x \rightarrow -0$ と書く。

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \alpha \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$$

③ $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ と $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ がともに存在してもそれらが一致しないとき、 $x \rightarrow a$ のときの $f(x)$ の極限はない。

5 右側極限と左側極限 (∞ または $-\infty$ の場合)

右側極限、左側極限が ∞ または $-\infty$ になる場合は、たとえば、 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty$ のように書き表す。

A 関数の極限とその性質

教 p.46

練習
19

次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 3x - 1)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -2} (x-3)(x+2)$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{2x-3}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{1-x}$$

指針 関数の極限 (1), (2) は x の多項式で表される関数, (3) は分数関数, (4) は無理関数で、 x が限りなく近づく値はそれぞれの関数の定義域に含まれているから、等式 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ が利用できる。

解答 (1) $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 3x - 1) = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 1 = -2$ 答

(2) $\lim_{x \rightarrow -2} (x-3)(x+2) = (-2-3)(-2+2) = 0$ 答

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{2x-3} = \frac{0+1}{2 \cdot 0 - 3} = -\frac{1}{3}$ 答

(4) $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{1-x} = \sqrt{1-(-1)} = \sqrt{2}$ 答

B 極限の計算

教 p.47

練習
20次の極限を求めよ。ただし、(3)の a は 0 でない定数とする。

$$(1) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+x} \right)$$

指針 極限の計算 関数 $f(x)$ が $x=a$ で定義されていなくても、 $x \rightarrow a$ のときの極限値が存在することがある。

たとえば、(1)の関数 $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ は、 $x = -3$ で定義されていない。

しかし、 $x \neq -3$ であれば、 $f(x) = \frac{(x+3)(x-3)}{x+3} = x-3$ となる。

したがって、 $x \rightarrow -3$ のとき、すなわち x が -3 と異なる値をとりながら -3 に限りなく近づくときは、上のような変形ができる。

よって、極限値は存在し、 $\lim_{x \rightarrow -3} (x-3)$ の値に等しい。

$$\text{解答 (1) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x-3)}{x+3} \quad \leftarrow \text{因数分解} \rightarrow \text{約分}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} (x-3) = -6 \quad \text{答}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x-2)} \quad \leftarrow a^3 - b^3$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x-2} = -3 \quad \text{答} \quad = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{a+x-a}{a(a+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{a(a+x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{a(a+x)} = \frac{1}{a^2} \quad \text{答}$$

練習
21

次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$$

指針 極限の計算 (無理式を含む関数) 分母 $\rightarrow 0$ 、分子 $\rightarrow 0$ となるが、分子または分母を有理化すると、前問と同様に約分できて、極限値が求められる。

$$\text{解答 (1) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} \quad \leftarrow \text{分子の有理化}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+3) - 2^2}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2} = \frac{1}{4} \quad \text{答}$$

教 p.47

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x}+2) = 4 \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

← 分母の有理化

練習
22

教 p.48

次の等式が成り立つように、定数 a , b の値を定めよ。

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\sqrt{x}+b}{x-2} = -1 \qquad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a\sqrt{x+4}+b}{x} = 1$$

指針 極限值から定数の決定

関数 $f(x)$, $g(x)$ と一定の値 α について、 $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ であるとき

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0 \text{ ならば } \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = 0$$

解答 (1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\sqrt{x}+b}{x-2} = -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

が成り立つとする。

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0 \text{ であるから}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (a\sqrt{x}+b) = 0$$

よって、 $\sqrt{2}a+b=0$ となり

$$b = -\sqrt{2}a \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\text{このとき } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\sqrt{x}+b}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \frac{a}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{a}{2\sqrt{2}} = -1 \text{ のとき } \textcircled{1} \text{ が成り立つから } a = -2\sqrt{2}$$

$$\text{このとき, } \textcircled{2} \text{ から } b = 4 \quad \text{答 } a = -2\sqrt{2}, b = 4$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a\sqrt{x+4}+b}{x} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

が成り立つとする。

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \text{ であるから } \lim_{x \rightarrow 0} (a\sqrt{x+4}+b) = 0$$

$$\text{よって, } 2a+b=0 \text{ となり } b = -2a \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\text{このとき } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a\sqrt{x+4}+b}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(\sqrt{x+4}-2)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{a}{4}$$

$\frac{a}{4}=1$ のとき ① が成り立つから $a=4$

このとき, ② から $b=-8$ 答 $a=4, b=-8$

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ かつ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ のとき,
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) = \alpha \cdot 0 = 0$ だね。



2 章

極限

C 極限が有限な値でない場合

教 p.49

練習 23

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2}$

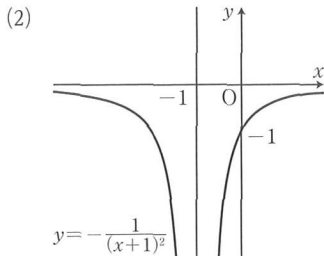
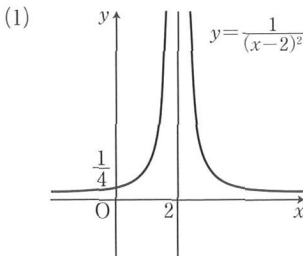
(2) $\lim_{x \rightarrow -1} \left\{ -\frac{1}{(x+1)^2} \right\}$

指針 関数の極限 分子は定数で分母は限りなく 0 に近づくから

- (1) 関数の値は限りなく大きくなる。
 (2) 関数の値は負で, 絶対値は限りなく大きくなる。

解答 (1) $\frac{1}{(x-2)^2} > 0$ より $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty$ 答

(2) $-\frac{1}{(x+1)^2} < 0$ より $\lim_{x \rightarrow -1} \left\{ -\frac{1}{(x+1)^2} \right\} = -\infty$ 答



D 片側からの極限

教 p.51

練習 24

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{|x|}{x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{|x|}{x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2-1}{|x-1|}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2-1}{|x-1|}$

指針 片側からの極限 (1), (2) は関数 $f(x) = \frac{|x|}{x}$, (3), (4) は関数 $f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}$ の片側からの極限を求める。(1) は右側極限で $x > 0$ の範囲, (2) は左側極限で $x < 0$ の範囲で上の関数の極限を調べればよい。(3) は $x > 1$, (4) は $x < 1$ で調べる。

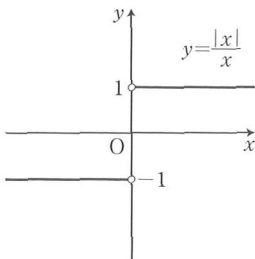
解答 (1) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} 1 = 1$ 答

(2) $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} (-1) = -1$ 答

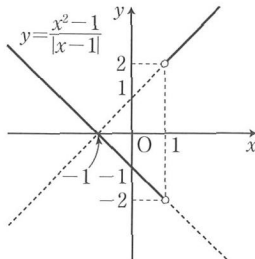
(3) $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2-1}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x+1) = 2$ 答

(4) $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2-1}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(x+1)(x-1)}{-(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \{-(x+1)\} = -2$ 答

(1), (2)



(3), (4)



練習
25

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x-1}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x-1}$

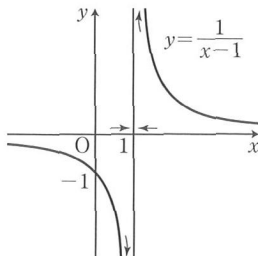
指針 片側からの極限 (∞ や $-\infty$)

関数 $y = \frac{1}{x-1}$ のグラフは図のようになる。

(1) は $x > 1$, (2) は $x < 1$ の範囲で極限を調べる。

解答 (1) $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x-1} = \infty$ 答

(2) $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x-1} = -\infty$ 答



教 p.51

5 関数の極限(2)

まとめ

2章

極限

1 $x \rightarrow \infty, x \rightarrow -\infty$

変数 x が限りなく大きくなることを, $x \rightarrow \infty$ で書き表す。また, x が負で, その絶対値が限りなく大きくなることを, $x \rightarrow -\infty$ で書き表す。

2 $x \rightarrow \infty, x \rightarrow -\infty$ のときの極限

関数 $f(x)$ において, $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば, この値 α を $x \rightarrow \infty$ のときの $f(x)$ の 極限值 または 極限 といい, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha$ と書き表す。 $x \rightarrow -\infty$ のときも同様に考える。

注意 関数 $f(x)$ の極限が ∞ または $-\infty$ になる意味も, $x \rightarrow a$ のときと同様に考える。

3 指数関数の極限

$a > 1$ のとき $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty,$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$0 < a < 1$ のとき $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0,$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$$

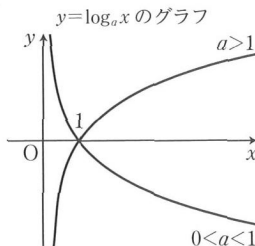
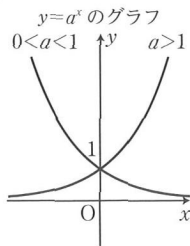
4 対数関数の極限

$a > 1$ のとき $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty,$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = -\infty$$

$0 < a < 1$ のとき $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = -\infty,$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = \infty$$

A $x \rightarrow \infty, x \rightarrow -\infty$ のときの極限

教 p.53

練習
26

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1-x^2}$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 2x)$

(4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 3x)$

指針 $x \rightarrow \infty, x \rightarrow -\infty$ のときの極限

(1), (2) 分子が定数で分母の絶対値が限りなく大きくなる形である。

(3), (4) x の多項式の最高次の項をくり出し, $\infty \times (\text{定数})$ の形を作る。

解答 (1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ 答 $\longleftrightarrow \frac{1}{\infty}$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1-x^2} = 0$ 答 $\longleftrightarrow \frac{1}{-\infty}$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \frac{2}{x}\right) = \infty$ 答 $\longleftrightarrow \infty \times 1$

(4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 3x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(1 + \frac{3}{x}\right) = \infty$ 答 $\longleftrightarrow \infty \times 1$

練習
27

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{4x+3}$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2+4}{2x^2-3x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4-x^2}{3x+2}$

(4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-2x}{x^2-4x+1}$

指針 分関数の極限 数列の極限の場合と同様に, 分母と分子を分母の最高次の項で割り, 分母の極限が定数となる形を作る。

(1), (3) は分母と分子を x で割り, (2), (4) は分母と分子を x^2 で割る。

解答 (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{4x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{4 + \frac{3}{x}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ 答

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2+4}{2x^2-3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 + \frac{4}{x^2}}{2 - \frac{3}{x}} = \frac{5}{2}$ 答

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4-x^2}{3x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{x} - x}{3 + \frac{2}{x}} = -\infty$ 答

(4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-2x}{x^2-4x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3}{x^2} - \frac{2}{x}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} = 0$ 答

練習
28

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+2x} - x)$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2+2x} + 2x)$

指針 無理関数の極限 数列について同様の形の極限を考えた (教科書 p.29 の例題 1 や練習 5)。ここでも「分子の有理化」から始める。さらに, 分子を定数に

するために、分母と分子を x で割る。

(2) $x \rightarrow -\infty$ の場合は、 $x = -t$ とおいて、 $x \rightarrow -\infty$ を $t \rightarrow \infty$ に変えてから極限を求めるとよい。

$$\begin{aligned} \text{解答 (1)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - x)(\sqrt{x^2 + 2x} + x)}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 2x) - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1} = 1 \quad \text{答} \end{aligned}$$

(2) $x = -t$ とおくと、 $x \rightarrow -\infty$ のとき $t \rightarrow \infty$ であるから

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 2x} + 2x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{4t^2 - 2t} - 2t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4t^2 - 2t} - 2t)(\sqrt{4t^2 - 2t} + 2t)}{\sqrt{4t^2 - 2t} + 2t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(4t^2 - 2t) - (2t)^2}{\sqrt{4t^2 - 2t} + 2t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2t}{\sqrt{4t^2 - 2t} + 2t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt{4 - \frac{2}{t}} + 2} = -\frac{1}{2} \quad \text{答} \end{aligned}$$



深める

教 p.54

$x < 0$ のとき $\sqrt{x^2} = -x$ であることを利用して、おき換えを利用せずに、教科書の応用例題 5 (2) を解いてみよう。

$$\begin{aligned} \text{解答} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} + x)(\sqrt{x^2 + x} - x)}{\sqrt{x^2 + x} - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 + x) - x^2}{\sqrt{x^2 + x} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1} \\ &= -\frac{1}{2} \quad \text{答} \end{aligned}$$

注意 $x < 0$ のとき、 $\sqrt{x^2} = -x$ であるから、 x の絶対値が十分大きいとき

$$\sqrt{x^2 + x} = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = -x \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \quad \text{となることに注意する。}$$

B 指数関数, 対数関数の極限

教 p.55

練習
29

次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x \quad (3) \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 x \quad (4) \lim_{x \rightarrow +0} \log_{0.5} x$$

指針 指数関数・対数関数の極限 底の値と $x \rightarrow \infty$ または $x \rightarrow -\infty$ の組み合わせで極限が異なる。簡単なグラフをかくと判断するとよい。

解答 (1) 底について, $2 > 1$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0 \quad \text{答} \quad \leftarrow y = a^x \ (a > 1)$$

(2) 底について, $0 < \frac{1}{3} < 1$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0 \quad \text{答} \quad \leftarrow y = a^x \ (0 < a < 1)$$

(3) 底について, $2 > 1$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 x = \infty \quad \text{答} \quad \leftarrow y = \log_a x \ (a > 1)$$

(4) 底について, $0 < 0.5 < 1$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow +0} \log_{0.5} x = \infty \quad \text{答} \quad \leftarrow y = \log_a x \ (0 < a < 1)$$

練習
30

次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} 2^{-3x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{-2x} \quad (3) \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{4x-1}{x+2}$$

教 p.55

指針 指数関数・対数関数の極限

(1) $2^{-3x} = \left(\frac{1}{2^3}\right)^x$ と変形して考えてもよいが, $x \rightarrow \infty$ のとき

$-3x \rightarrow -\infty$ であることを使えば, もとの形のまま極限を調べることができる。

(3) まず真数部分の分数関数の極限を求める。

解答 (1) $-3x = t$ とおくと, $x \rightarrow \infty$ のとき $t \rightarrow -\infty$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2^{-3x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} 2^t = 0 \quad \text{答}$$

(2) $-2x = t$ とおくと, $x \rightarrow -\infty$ のとき $t \rightarrow \infty$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{-2x} = \lim_{t \rightarrow \infty} 2^t = \infty \quad \text{答}$$

(3) $\frac{4x-1}{x+2} = \frac{4 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}}$ であるから, $x \rightarrow \infty$ のとき

$$\frac{4x-1}{x+2} \rightarrow 4$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{4x-1}{x+2} = \log_2 4 = 2 \quad \text{答}$$

別解 (3) $\frac{4x-1}{x+2} = \frac{4(x+2)-9}{x+2} = 4 - \frac{9}{x+2}$ であるから

$$x \rightarrow \infty \text{ のとき } \frac{4x-1}{x+2} \rightarrow 4$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{4x-1}{x+2} = \log_2 4 = 2 \quad \text{答}$$

6 三角関数と極限

まとめ

1 $\sin x, \cos x$ の極限

三角関数 $\sin x, \cos x$ は周期関数であり, 2π ごとに同じ値を繰り返すから,
 $x \rightarrow \infty$ のときの $\sin x, \cos x$ の極限はない。

2 $\tan x$ の極限

周期関数であり $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \tan x = -\infty, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \tan x = \infty$

注意 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ のときの $\tan x$ の極限はない。

3 関数の極限の性質(2)

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ とする。

[5] $x=a$ の近くで常に $f(x) \leq g(x)$ ならば $\alpha \leq \beta$

[6] $x=a$ の近くで常に $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ かつ $\alpha = \beta$ ならば

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \alpha$$

注意 (1) 性質 **[6]** を「はさみうちの原理」ということがある。

(2) 性質 **[5]**, **[6]** は $x \rightarrow a+0$ または $x \rightarrow a-0$ のときや,
 $x \rightarrow \infty, x \rightarrow -\infty$ のときにも成り立つ。

補足 十分大きい x で常に $f(x) \leq g(x)$ であり, かつ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ならば

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$$

4 $\frac{\sin x}{x}$ の極限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

A 三角関数の極限

教 p.56

練習
31

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \frac{1}{x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos \frac{1}{x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow \pi} \tan x$

指針 三角関数の極限 (1), (2) $x \rightarrow -\infty$ のとき $\frac{1}{x} \rightarrow -0$ であるから、

それぞれ $\sin 0, \cos 0$ の値に限りなく近づく。

(3) π は $\tan x$ の定義域内の値であるから $\lim_{x \rightarrow \pi} \tan x = \tan \pi$

解答 (1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \frac{1}{x} = 0$ 答

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos \frac{1}{x} = 1$ 答

(3) $\lim_{x \rightarrow \pi} \tan x = \tan \pi = 0$ 答

練習
32

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x}$

指針 関数の極限の性質 (2) 常に $0 \leq |\sin x| \leq 1, 0 \leq |\cos x| \leq 1$ が成り立つ。これと関数の極限の性質 ⑥ (はさみうちの原理) を利用する。

解答 (1) $0 \leq \left| \cos \frac{1}{x} \right| \leq 1$ より

$$0 \leq \left| x \cos \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \cos \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

ここで、 $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| x \cos \frac{1}{x} \right| = 0$$

← はさみうちの原理

よって $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$ 答

(2) $0 \leq |\sin x| \leq 1$ より

$$0 \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right| = \frac{1}{|x|} |\sin x| \leq \frac{1}{|x|}$$

ここで、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} = 0$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| = 0$$

← はさみうちの原理

よって $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ 答

$$(3) \quad 0 \leq |\cos x| \leq 1 \text{ より}$$

$$0 \leq \left| \frac{\cos x}{x} \right| = \frac{1}{|x|} |\cos x| \leq \frac{1}{|x|}$$

ここで、 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x|} = 0$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \frac{\cos x}{x} \right| = 0$$

← はさみうちの原理

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x} = 0 \quad \square$$

$|A| \rightarrow 0$ のとき、 A は正の数でも負の数でも 0 に限りなく近づくよ。



B $\frac{\sin x}{x}$ の極限

教 p.59

練習
33

次の極限を求めよ。

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$$

指針 $\frac{\sin x}{x}$ の極限の利用 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ は重要な公式で、三角関数に関する極限を求める問題の多くは、この公式に帰着させることが解決のポイントとなる。また、 k を定数 ($k \neq 0$) とすると、 $x \rightarrow 0$ のとき $kx \rightarrow 0$ であるから、次のように、 x の係数をそろえて広く応用される。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1, \quad \dots, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{解答 (1)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} \quad \square \end{aligned}$$

← $2x$ にそろえる。
 $x \rightarrow 0$ のとき
 $2x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) \\ &= \frac{1}{1} \cdot 1 = 1 \quad \square \end{aligned}$$

← $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

← $x \rightarrow 0$ のとき
 $\cos x \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{\sin 3x}{\sin 5x} \cdot \frac{\sin 5x}{3x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\frac{\sin 5x}{5x}} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \right) \end{aligned}$$

← $5x, 3x$ を作る。

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{1} \cdot 1 = \frac{3}{5} \quad \text{答}$$

注意 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ は、公式に準ずるものとし

て覚えておくとよい。

$$\begin{aligned} \leftarrow \frac{x}{\sin x} &= \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} \\ &\rightarrow \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

公式 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ は、

$\lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1$ と覚えよう。



練習 34

次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\cos x - 1}$$

指針 三角関数の極限 $x \rightarrow 0$ のとき、分母 $\rightarrow 0$ 、分子 $\rightarrow 0$ となり、このままでは極限を調べるできない。

そこで、公式 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を利用できるようにするために、 $\frac{\sin x}{x}$ や $\frac{x}{\sin x}$ が現れるような式に変形する。

$(1 - \cos x)(1 + \cos x) = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$ であるから、

(1) は $1 + \cos x$, (2) は $\cos x + 1$ を分母・分子に掛けて式を変形する。

$$\begin{aligned} \text{解答 (1)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \\ &= 1^2 \cdot \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} \quad \text{答} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\cos x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (\cos x + 1)}{(\cos x - 1)(\cos x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (\cos x + 1)}{\cos^2 x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (\cos x + 1)}{-\sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x (\cos x + 1)}{-\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{x}{\sin x} \right) (\cos x + 1) \\ &= (-1) \cdot (1 + 1) = -2 \quad \text{答} \end{aligned}$$

C 三角関数の極限の応用

教 p.60

練習
35

教科書の応用例題 8 において、弧 $\widehat{AB}$ の長さを $\widehat{AB}$ で表すとき、
極限 $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{CD}{\widehat{AB}^2}$ を求めよ。

2
章極
限

指針 図形に関する極限 半径 r 、中心角 θ の扇形の弧の長さを l とすると $l=r\theta$ で与えられる。半径 1 の扇形 OAB の中心角は 2θ であるから、 $\widehat{AB}=1 \cdot 2\theta=2\theta$ と表される。

また、 $CD=OC-OD=1-\cos\theta$ であるから、本問は、極限 $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{1-\cos\theta}{(2\theta)^2}$ を求める問題となる。

解答 $AB \perp OD$ で、 OD は $\angle AOB$ の二等分線であるから

$$\angle AOD = \theta$$

よって $CD=OC-OD=1-\cos\theta$

また、 $\widehat{AB}$ は半径 1、中心角 2θ の扇形の弧の長さであるから

$$\widehat{AB}=1 \cdot 2\theta=2\theta$$

したがって、求める極限は

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{CD}{\widehat{AB}^2} &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{1-\cos\theta}{(2\theta)^2} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{4\theta^2(1+\cos\theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{1-\cos^2\theta}{4\theta^2(1+\cos\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\sin^2\theta}{4\theta^2(1+\cos\theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \left\{ \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\sin\theta}{\theta} \right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos\theta} \right\} \\ &= \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{8} \quad \text{答} \end{aligned}$$

教 p.60

深
め
る

教科書の応用例題 8 において、直線 OC と円 O の交点のうち、 C でない方の点を E とする。このとき、 $\frac{CD}{\widehat{AB}^2} = \frac{1}{4DE}$ が成り立つことを示してみよう。応用例題 8 の極限值についてどのような考察ができるだろうか。

指針 図形に関する極限 方べきの定理を利用する。

解答 方べきの定理により $DE \cdot DC = DB \cdot DA$

$$DB=DA=\frac{1}{2}\widehat{AB} \text{ であるから } DE \cdot DC = \frac{1}{4}\widehat{AB}^2$$

$$\text{よって } \frac{CD}{\widehat{AB}^2} = \frac{1}{4DE} \quad \text{終}$$

$\theta > 0$ の範囲で θ が 0 に限りなく近づくとき、DE は CE、すなわち円 O の直径に限りなく近づくと考えられる。このように考えると

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{CD}{AB^2} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{1}{4DE} = \frac{1}{4CE} = \frac{1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8} \quad \text{終}$$

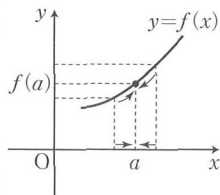
7 関数の連続性

まとめ

1 関数の連続

関数 $f(x)$ において、その定義域内の x の値 a に対して、極限值 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ が存在し、かつ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ が成り立つとき、 $f(x)$ は $x=a$ で **連続** であるという。

このとき、 $y=f(x)$ のグラフは $x=a$ でつながっている。



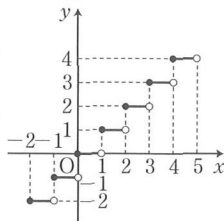
注意 値 a が関数 $f(x)$ の定義域の左端または右端であるときは、それぞれ

$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$ または $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a)$ が成り立つならば、 $f(x)$ は $x=a$ で連続であるという。

2 ガウス記号

x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す。記号 $[\]$ を **ガウス記号** という。

関数 $y=[x]$ のグラフは図のようになり、 x が整数の値をとるところで切れている。



3 関数の不連続

関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続でないとき、 $x=a$ で **不連続** であるという。このとき、そのグラフは $x=a$ で切れている。

4 関数の連続性の性質

関数 $f(x)$ 、 $g(x)$ がともに $x=a$ で連続ならば、次の関数はいずれも $x=a$ で連続である。

$$kf(x), f(x)+g(x), f(x)-g(x), f(x)g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$$

ただし、 k は定数であり、 $\frac{f(x)}{g(x)}$ においては $g(a) \neq 0$ とする。

5 区間

不等式 $a < x < b$, $a \leq x \leq b$, $a \leq x$, $x < b$ などを満たす実数 x 全体の集合を 区間 といい, それぞれ (a, b) , $[a, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, b)$ のように書き表す。実数全体の集合は, $(-\infty, \infty)$ で表す。

また, 区間 (a, b) を 开区間 といい, 区間 $[a, b]$ を 閉区間 という。

6 区間で連続

関数 $f(x)$ が, ある区間のすべての x の値で連続であるとき, $f(x)$ はその 区間で連続 であるという。

7 連続関数

定義域内のすべての x の値で連続な関数を 連続関数 という。

関数 $f(x)$ と $g(x)$ が区間 I でともに連続ならば, 次の関数はいずれも区間 I で連続である。ただし, k は定数とする。

$$kf(x), f(x)+g(x), f(x)-g(x), f(x)g(x)$$

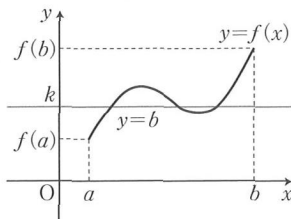
また, 関数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ は区間 I から $g(x)=0$ となる x の値を除いたそれぞれの区間で定義され, それらの各区間で連続である。

8 連続関数の性質

閉区間で連続な関数は, その区間で最大値および最小値をもつ。

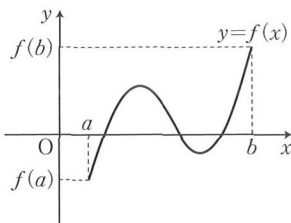
9 中間値の定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で, $f(a) \neq f(b)$ ならば, $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 k に対して $f(c)=k$, $a < c < b$ を満たす実数 c が少なくとも1つある。



10 方程式の実数解 (中間値の定理の応用)

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で, $f(a)$ と $f(b)$ の符号が異なれば, 方程式 $f(x)=0$ は $a < x < b$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつ。



A 関数の連続性

教 p.63

練習
36次の関数 $f(x)$ が, $x=0$ で連続であるか不連続であるかを調べよ。

(1) $f(x)=x[x]$ (2) $f(x)=(x+1)[x]$ (3) $f(x)=\sqrt{x}$

指針 関数の連続・不連続

(1), (2) $x=0$ での連続, 不連続を調べるから, [極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ が存在して, かつ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=f(0)$] ならば連続であり, それ以外の場合は不連続である。

本問では関数に $[x]$ が含まれるから, 右側極限 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$, 左側極限 $\lim_{x \rightarrow -0} f(x)$ から調べなければならない。次のことに注意する。

$$0 \leq x < 1 \text{ のとき } [x]=0, \quad -1 \leq x < 0 \text{ のとき } [x]=-1$$

(3) $x=0$ は関数 $f(x)=\sqrt{x}$ の定義域の左端であるから, 右側極限だけ調べればよい。 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)=f(0)$ が成り立てば連続である。

解答 (1) $0 \leq x < 1$ のとき $f(x)=x \cdot 0=0$
 $-1 \leq x < 0$ のとき $f(x)=x \cdot (-1)=-x$

よって $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)=0$
 $\lim_{x \rightarrow -0} f(x)=\lim_{x \rightarrow -0} (-x)=0$

ゆえに $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=0$

また, $f(0)=0 \cdot 0=0$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=f(0)$$

したがって, $f(x)$ は $x=0$ で 連続 である。答

(2) $0 \leq x < 1$ のとき

$$f(x)=(x+1) \cdot 0=0$$

$-1 \leq x < 0$ のとき

$$f(x)=(x+1) \cdot (-1)=-x-1$$

よって $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)=0$
 $\lim_{x \rightarrow -0} f(x)=\lim_{x \rightarrow -0} (-x-1)=-1$

ゆえに, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ は存在しない。

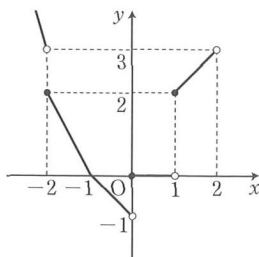
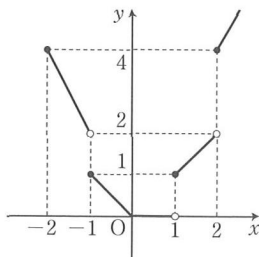
したがって, $f(x)$ は $x=0$ で 不連続 である。答

(3) $f(x)=\sqrt{x}$ の定義域は $x \geq 0$ である。

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x)=\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x}=0, \quad f(0)=0 \text{ であるから}$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x)=f(0)$$

よって, $f(x)$ は $x=0$ で 連続 である。答



B 区間における連続

教 p.64

練習
37

次の関数が連続である区間を求めよ。

(1) $f(x) = \sqrt{1-x}$

(2) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$

指針 区間における連続 無理関数、分数関数はその定義域で連続である。

解答 (1) 定義域は $x \leq 1$ であるから、連続である区間は $(-\infty, 1]$ 答(2) $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ より、定義域は

$x \neq 1, x \neq 2$

よって、連続である区間は

 $(-\infty, 1), (1, 2), (2, \infty)$ 答

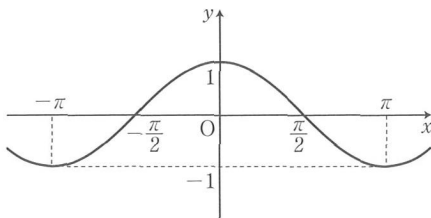
C 連続関数の性質

教 p.64

練習
38次の区間における関数 $f(x) = \cos x$ の最大値、最小値について調べよ。

(1) $[0, \pi]$

(2) $[-\pi, \pi]$

指針 連続関数の性質 関数 $y = \cos x$ のグラフは図のようになる。解答 (1) 関数 $f(x) = \cos x$ は、閉区間 $[0, \pi]$ で連続である。この区間において、 $f(x)$ は $x=0$ で最大値 1, $x=\pi$ で最小値 -1 をとる。答(2) 関数 $f(x) = \cos x$ は、閉区間 $[-\pi, \pi]$ で連続である。この区間において、 $f(x)$ は $x=0$ で最大値 1, $x=-\pi, \pi$ で最小値 -1 をとる。答

練習
39

方程式 $2^x - 3x = 0$ は、 $3 < x < 4$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ。

指針 方程式の実数解 $f(x) = 2^x - 3x$ とおくと、関数 $y = 2^x$, $y = -3x$ はともに連続であるから、 $f(x)$ は連続である。

あとは、 $f(3)$ と $f(4)$ の符号が異なることを示せばよい。

解答 $f(x) = 2^x - 3x$ とおくと、 $f(x)$ は閉区間 $[3, 4]$ で連続である。

$$\text{また } f(3) = 2^3 - 3 \cdot 3 = -1 < 0$$

$$f(4) = 2^4 - 3 \cdot 4 = 4 > 0$$

であり、 $f(3)$ と $f(4)$ は符号が異なる。

したがって、方程式 $f(x) = 0$ すなわち $2^x - 3x = 0$ は、 $3 < x < 4$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ。 

第2章 第2節

問題

教 p.66

2
章極
限

7 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^3-1}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{2x}-\sqrt{x+2}}$

指針 関数の極限

(1) $x \rightarrow 1$ のとき、分母 $\rightarrow 0$ 、分子 $\rightarrow 0$ であるから、分母と分子ともに $x-1$ を因数にもつことがわかる。分母を因数分解して約分する。

(2) 分母を有理化すると約分できて、極限が求められる。

$$\begin{aligned}
 \text{解答 (1)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^3-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2+x+1} \\
 &= \frac{1}{1^2+1+1} = \frac{1}{3} \quad \boxed{\text{答}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(2)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{2x}-\sqrt{x+2}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{2x}+\sqrt{x+2})}{(\sqrt{2x}-\sqrt{x+2})(\sqrt{2x}+\sqrt{x+2})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{2x}+\sqrt{x+2})}{2x-(x+2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{2x}+\sqrt{x+2})}{x-2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{2x}+\sqrt{x+2}) \\
 &= \sqrt{2 \cdot 2} + \sqrt{2+2} = 4 \quad \boxed{\text{答}}
 \end{aligned}$$

$\frac{0}{0}$ 形のときは、式を変形してみよう。



教 p.66

8 関数 $f(x) = \frac{x^2+a}{x-2}$ が $x \rightarrow 2$ のとき収束するように、定数 a の値を定め、極限值 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ を求めよ。

指針 極限值と係数の決定 まず、 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ が極限值をもち、 $x \rightarrow 2$ のとき、分母 $\rightarrow 0$ ならば分子 $\rightarrow 0$ であることを利用して a の値を求める。極限値は、約分してから求める。

解答 極限値を α とすると、 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+a}{x-2} = \alpha$ が成り立つとき、

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0 \text{ であるから } \lim_{x \rightarrow 2} (x^2+a) = 0$$

$$\text{よって } 4+a=0 \quad \text{ゆえに } a=-4 \quad \text{答}$$

$$\text{このとき } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4 \quad \text{答}$$

教 p.66

9 次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} + x)$$

指針 無理関数の極限

(1), (2) 分母が1の分数と考えて、分子を有理化する。(2)は $x \rightarrow -\infty$ であるから、 $x = -t$ とおいて、 $t \rightarrow \infty$ として極限を求めるとよい。

$$\text{解答 (1) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1) - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0 \quad \text{答}$$

(2) $x = -t$ とおくと、 $x \rightarrow -\infty$ のとき $t \rightarrow \infty$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} + x) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2+1} - t)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{t^2+1} - t)(\sqrt{t^2+1} + t)}{\sqrt{t^2+1} + t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(t^2+1) - t^2}{\sqrt{t^2+1} + t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{t^2+1} + t} = 0 \quad \text{答}$$

教 p.66

10 次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \{\log_2(x^2+4) - \log_2 2x^2\}$$

指針 指数関数・対数関数の極限

(1) $x \rightarrow -\infty$ のとき、 $2^x \rightarrow 0$ 、 $2^{-x} \rightarrow \infty$ となるから、分母と分子を ∞ に発散する 2^{-x} で割る。

(2) 対数を1つにまとめると、真数の部分が分数関数になる。

解答 (1) 分母、分子を 2^{-x} で割ると

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{2x} - 1}{2^{2x} + 1}$$

$$= \frac{0-1}{0+1} = -1 \quad \text{答}$$

$$\leftarrow 2^x \div 2^{-x} = 2^{x-(-x)} = 2^{2x}$$

$$\leftarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{2x} = 0$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \{\log_2(x^2+4) - \log_2 2x^2\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{x^2+4}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{x^2} \right) \\
 &= \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1 \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \leftarrow \log_a M - \log_a N \\
 &= \log_a \frac{M}{N}
 \end{aligned}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ 形の場合は、式を変形
してみよう。



教 p.66

11 次の極限を求めよ。

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin 3x}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\cos 2x - 1}$$

指針 三角関数の極限

(1) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ を使う。さらに、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx} = 1$ (k は定数) が利用できるよ
うに変形する。

(2) 2 倍角の公式 $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ を使って $\sin x$ で表すと、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ の
公式が使える。

$$\begin{aligned}
 \text{解答 (1)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin 3x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\frac{\sin 3x}{3x}} \right) \\
 &= \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{3} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\leftarrow \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$\leftarrow \sin kx$ と kx が
現れるように変形

$$\leftarrow \frac{3x}{\sin 3x} = \frac{1}{\frac{\sin 3x}{3x}}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\cos 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(1 - 2\sin^2 x) - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{-2\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{\sin x}{x}} \right)^2 \right\} \\
 &= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} \right)^2 = -\frac{1}{2} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\leftarrow \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\leftarrow \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\frac{\sin x}{x}}$$

別解 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ を用いると

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{1}{\frac{\sin 3x}{3x}} \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{3} \quad \text{答}\end{aligned}$$

教 p.66

12 $x - \pi = \theta$ とおくことにより、極限 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{(x - \pi)^2}$ を求めよ。

指針 三角関数の極限 $x - \pi = \theta$ とおくと、 $x \rightarrow \pi$ のとき $\theta \rightarrow 0$ となる。また、 $\cos x = \cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$ となり、分母、分子に $1 + \cos \theta$ を掛けて、

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \text{ の公式が使える形を導く。}$$

解答 $x - \pi = \theta$ とおくと、 $x \rightarrow \pi$ のとき $\theta \rightarrow 0$ であるから

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{(x - \pi)^2} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 + \cos(\pi + \theta)}{\theta^2} && \leftarrow \cos(\pi + \theta) \\ & && = -\cos \theta \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{\theta^2(1 + \cos \theta)} && \leftarrow \text{分母と分子に} \\ & && 1 + \cos \theta \text{ を掛ける。} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 \theta}{\theta^2(1 + \cos \theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2(1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos \theta} \\ &= 1^2 \cdot \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} \quad \text{答}\end{aligned}$$

教 p.66

13 次の関数 $f(x)$ が $x=0$ で連続であるように、定数 a の値を定めよ。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x}{x} & (x \neq 0) \\ a & (x = 0) \end{cases}$$

指針 関数の連続性 関数 $f(x)$ が $x=0$ で連続であるためには、極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ が存在し、かつ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ が成り立てばよい。

$$\text{解答} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 1 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

$$\text{また} \quad f(0) = a \quad \cdots \cdots \text{②}$$

関数 $f(x)$ が $x=0$ で連続であるための条件は

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

であるから、①、②より $a=1$ 答

14 方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ は負の解をもつことを示せ。

指針 方程式の実数解 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ とすると、関数 $f(x)$ は実数全体で連続である。 $f(x) = 0$ が負の解をもつことを示すには、 $f(0) = 1 > 0$ であるから、適当な負の数 a で $f(a) < 0$ となる値を見つけ、閉区間 $[a, 0]$ で調べればよい。

解答 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ とすると、 $f(x)$ は閉区間 $[-2, 0]$ で連続である。

$$\text{また } f(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2) + 1 = -1 < 0$$

$$f(0) = 1 > 0$$

であり、 $f(-2)$ と $f(0)$ は符号が異なる。

よって、方程式 $f(x) = 0$ すなわち $x^3 - 3x + 1 = 0$ は、 $-2 < x < 0$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつ。

したがって、方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ は負の解をもつ。 終

15 半径 r の円に内接する正 n 角形の面積を S_n とする。

(1) S_n を n を用いて表せ。

(2) 半径 r の円の面積を S とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ であることを示せ。

指針 図形に関する極限

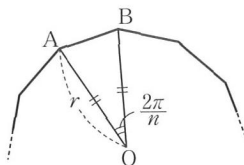
(1) 正 n 角形を合同な n 個の二等辺三角形に分けて考える。

(2) 公式 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を利用する。

解答 (1) 正 n 角形の外接円の中心を O とする。

このとき、半径 r の円に内接する正 n 角形は右の図の $\triangle OAB$ と合同な n 個の二等辺三角形に分けることができる。よって

$$S_n = \frac{1}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{n} \times n = \frac{r^2}{2} n \sin \frac{2\pi}{n} \quad \text{答}$$



(2) 半径 r の円の面積 S は $S = \pi r^2$

$$\text{また } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^2}{2} n \sin \frac{2\pi}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r^2}{2} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} \cdot 2\pi \right)$$

ここで、 $\frac{2\pi}{n} = x$ とおけば、 $n \rightarrow \infty$ のとき $x \rightarrow +0$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{r^2}{2} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot 2\pi \right) = \frac{r^2}{2} \cdot 1 \cdot 2\pi = \pi r^2 = S \quad \text{終}$$

第2章 章末問題A

教 p.67

1. 次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2} \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}}{1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}}$$

指針 数列の極限 まず分子、分母の数列の和を公式を用いて計算する。

(1)の分子は $\sum_{k=1}^n k^2$ 、分母は $\left(\sum_{k=1}^n k\right)^2$ であり、(2)はそれぞれ等比数列の和である。

極限は、分母が定数に収束する形を作って調べる。

解答 (1) 分子 $= \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

分母 $= \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2 = \left\{\frac{1}{2} n(n+1)\right\}^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

であるから

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{6} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^2(n+1)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \cdot \frac{2n+1}{n^2+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} \end{aligned}$$

← 分母と分子を n^2 で割る。 $= 0$ 答

(2) 分子 $= \frac{1 \cdot (3^n - 1)}{3 - 1} = \frac{3^n - 1}{2}$

分母 $= \frac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$

← 等比数列の和
 $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

であるから

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}}{1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3^n - 1}{2^n - 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2^n}} = \infty \quad \text{答} \end{aligned}$$

← 分母と分子を 2^n で割る。

数学Bで習った数列の和の
公式を思い出そう。



2. n を自然数とすると、次の問いに答えよ。

(1) 不等式 $2^n \geq 1 + n + \frac{n(n-1)}{2}$ が成り立つことを示せ。

(2) (1) の不等式を用いて、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n}$ を求めよ。

指針 数列の極限の性質

(1) $n \geq 2$ のとき、右辺の項が $1(= {}_nC_0)$, $n(= {}_nC_1)$, $\frac{n(n-1)}{2}(= {}_nC_2)$ であるこ

とに着目して、二項定理を利用する。

$$(a+b)^n = {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1} b + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + {}_nC_n b^n$$

において、 $a=b=1$ として導く。なお、 $n=1$ のときには別途に扱う必要がある。

(2) (1) の不等式から「はさみうちの原理」が使える不等式を作って求める。

解答 (1) [1] $n=1$ のとき

$$\text{左辺} = 2^1 = 2, \text{右辺} = 1 + 1 + 0 = 2$$

よって、与えられた不等式は成り立つ。

[2] $n \geq 2$ のとき

二項定理により

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n &< (a+b)^n \\ &\geq {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 &= \sum_{k=0}^n {}_nC_k a^{n-k} b^k \\ &= 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

よって $2^n \geq 1 + n + \frac{n(n-1)}{2}$ となるので、与えられた不等式は成り立つ。

[1], [2] より、すべての自然数 n について与えられた不等式は成り立つ。

終

(2) (1) の不等式から $2^n \geq 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} > \frac{n(n-1)}{2}$

よって、 $n \geq 2$ のとき、 $\frac{1}{2^n} < \frac{2}{n(n-1)}$ であるから

$$\frac{n}{2^n} < \frac{2n}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1} \quad \text{より} \quad 0 < \frac{n}{2^n} < \frac{2}{n-1}$$

← はさみうちの原理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n-1} = 0 \text{ であるから } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0 \quad \square$$

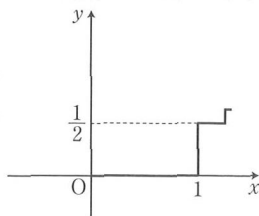
二項定理は
数学Ⅱで習ったね。



注意 本問の(1)を二項定理を用いて証明する場合、少なくとも ${}_nC_0, {}_nC_1, {}_nC_2$ の3つを考える必要があるが、 ${}_nC_r$ が定義されるのは $n \geq r$ のときであるから、 $n \geq 2$ でなければならず、 $n=1$ の場合は別途に考えねばならない。したがって、[2]のみを記述するだけでは不完全な証明になってしまうから慎重に扱う必要がある。

教 p.67

3. 座標平面上で、点Pが原点Oからx軸の正の向きに1だけ進み、次にy軸の正の向きに $\frac{1}{2}$ だけ進み、次にx軸の正の向きに $\frac{1}{2^2}$ だけ進み、次にy軸の正の向きに $\frac{1}{2^3}$ だけ進む。以下、同様な運動を限りなく続けるとき、点Pが近づいていく点の座標を求めよ。



指針 点の運動と無限等比級数 点Pの座標を順に表していくと

$$(0, 0), (1, 0), \left(1, \frac{1}{2}\right), \left(1 + \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2}\right), \left(1 + \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3}\right), \dots$$

x座標、y座標はそれぞれ無限等比級数で表される。

解答 求める点の座標を (x, y) とすると

$$x = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots, \quad y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \dots$$

それぞれ初項が $1, \frac{1}{2}$ で、公比が $\frac{1}{2^2}$ の無限等比級数で表される。

公比について $\left|\frac{1}{2^2}\right| < 1$ であるから収束して

$$\leftarrow |r| < 1$$

$$x = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^2}} = \frac{4}{3}, \quad y = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\leftarrow \frac{a}{1-r}$$

よって、求める点の座標は $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 答

教 p.67

4. 次の極限を求めよ。ただし、(4)の a は1でない正の定数とする。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{3x-1}}{x-1}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -0} 2^{\frac{1}{x}}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \{\log_a(ax^2+1) - \log_a x^2\}$$

指針 関数の極限 (1) 分子を有理化する。

- (2) $x = -t$ とおく。 $x \rightarrow -\infty$ のとき $t \rightarrow \infty$
 (3) $\frac{1}{x} = t$ とおく。 $x \rightarrow -0$ のとき $t \rightarrow -\infty$
 (4) 対数関数を 1 つにまとめる。真数部分は分数関数となる。

解答 (1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{3x-1}}{x-1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{3x-1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{3x-1})}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3x-1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1 - (3x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3x-1})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3x-1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{3x-1}} = \frac{-2}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \square$$

 (2) $x = -t$ とおくと, $x \rightarrow -\infty$ のとき $t \rightarrow \infty$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+t^2} - 1}{-t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{t} \left(t \sqrt{\frac{1}{t^2} + 1} - 1 \right) \right\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\sqrt{\frac{1}{t^2} + 1} + \frac{1}{t} \right) = -1 \quad \square$$

 (3) $\frac{1}{x} = t$ とおくと, $x \rightarrow -0$ のとき $t \rightarrow -\infty$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow -0} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} 2^t = 0 \quad \square$$

 (4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \{\log_a(ax^2+1) - \log_a x^2\}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a \frac{ax^2+1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a \left(a + \frac{1}{x^2} \right) = \log_a a = 1 \quad \square$$

教 p.67

5. 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \tan x}$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

指針 三角関数の極限 公式 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ の利用を考えて変形する。

また, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ も使う。

- (1) 分母と分子に $1 + \cos 2x$ を掛ける。
 (2) 変形の途中で分母と分子に $1 + \cos x$ を掛ける。

解答 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \tan x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)}{x \tan x (1 + \cos 2x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \cdot (1 + \cos 2x)}$$

← 分母と分子に
 $1 + \cos 2x$ を掛ける。

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right)^2 \cdot \frac{4x}{\sin x} \cdot \frac{1}{1 + \cos 2x} \right\} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right)^2 \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{4 \cos x}{1 + \cos 2x} \right\} = 1^2 \cdot 1 \cdot \frac{4}{1+1} = 2 \quad \text{答} \\
(2) \quad &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left(\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3 \cos x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^3 \cos x(1 + \cos x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin x}{x} \right)^3 \cdot \frac{1}{\cos x(1 + \cos x)} \right\} = 1^3 \cdot \frac{1}{1 \cdot (1+1)} = \frac{1}{2} \quad \text{答}
\end{aligned}$$

← 分母と分子に
 $1 + \cos x$ を掛ける。

別解 (1) $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ より

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x \cdot \frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \cos x \right) = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \quad \text{答}$$

教 p.67

6. 方程式 $\log_2 x + \frac{1}{2}x = 1$ は、 $1 < x < 2$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ。

指針 方程式の実数解 $f(x) = \log_2 x + \frac{1}{2}x - 1$ とおき、関数 $f(x)$ が閉区間 $[1, 2]$ で連続であることをいい、 $f(1)$ と $f(2)$ の符号が異なることを示す。

解答 $f(x) = \log_2 x + \frac{1}{2}x - 1$ とおくと $f(x)$ は閉区間 $[1, 2]$ で連続である。

$$\text{また} \quad f(1) = \log_2 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 - 1 = -\frac{1}{2} < 0$$

$$f(2) = \log_2 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 - 1 = 1 > 0$$

であり、 $f(1)$ と $f(2)$ は符号が異なる。

したがって、方程式 $f(x) = 0$ すなわち $\log_2 x + \frac{1}{2}x = 1$ は、 $1 < x < 2$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ。 図

注意 $\log_2 x$ の定義域は $x > 0$ であるから、**解答** の関数 $f(x)$ は区間 $(0, \infty)$ で連続である。

第2章 章末問題B

教 p.68

2
章極
限

7. 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ について、以下の問いに答えよ。

$$a_1 = \frac{3}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{2}{3-a_n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

- (1) $a_n = \frac{2^{n-1}+2}{2^{n-1}+1}$ を示せ。 (2) 数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

指針 漸化式で表された数列の極限

(1) 証明は数学的帰納法を用いる。まず、 $n=1$ のとき成り立つことを示す。

次に、 $a_k = \frac{2^{k-1}+2}{2^{k-1}+1}$ を仮定して、 $a_{k+1} = \frac{2^k+2}{2^k+1}$ を導く。

(2) a_n の分母と分子を 2^{n-1} で割り、分母が収束する形を作る。

解答 (1) $a_n = \frac{2^{n-1}+2}{2^{n-1}+1}$ を (A) とする。

$$[1] \quad n=1 \text{ のとき 右辺は } \frac{2^{1-1}+2}{2^{1-1}+1} = \frac{3}{2}$$

$a_1 = \frac{3}{2}$ であるから、 $n=1$ のとき、(A) が成り立つ。

[2] $n=k$ のとき (A) が成り立つ、すなわち $a_k = \frac{2^{k-1}+2}{2^{k-1}+1}$ が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{2}{3-a_k} = \frac{2}{3-\frac{2^{k-1}+2}{2^{k-1}+1}} = \frac{2(2^{k-1}+1)}{3(2^{k-1}+1)-(2^{k-1}+2)} \\ &= \frac{2 \cdot 2^{k-1}+2}{2 \cdot 2^{k-1}+1} = \frac{2^k+2}{2^k+1} = \frac{2^{(k+1)-1}+2}{2^{(k+1)-1}+1} \end{aligned}$$

よって、 $n=k+1$ のときも (A) が成り立つ。

[1], [2] から、すべての自然数 n について (A) が成り立つ。 終

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1}+2}{2^{n-1}+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = 1 \quad \text{答}$$

教 p.68

8. 和が1の無限等比級数がある。この各項を2乗して得られる無限等比級数の和は2である。もとの無限等比級数の初項と公比を求めよ。

指針 無限等比級数の和 求める初項を a 、公比を r とすると、各項を2乗して得られる無限等比級数の初項は a^2 、公比は r^2 と表される。それぞれの級数の和を a と r を使って表す。

解答 もとの無限等比級数の初項を a 、公比を r とすると、 $a \neq 0$ 、 $|r| < 1$ で

$$\frac{a}{1-r} = 1 \quad \cdots \cdots \text{①}, \quad \frac{a^2}{1-r^2} = 2 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$$\text{① より} \quad a = 1 - r \quad \cdots \cdots \text{③}$$

$$\text{② より} \quad \frac{a}{1+r} \cdot \frac{a}{1-r} = 2$$

$$\text{① を代入して} \quad \frac{a}{1+r} \cdot 1 = 2$$

$$\text{よって} \quad a = 2 + 2r \quad \cdots \cdots \text{④}$$

$$\text{③, ④ を解くと} \quad a = \frac{4}{3}, \quad r = -\frac{1}{3}$$

これは $a \neq 0$ 、 $|r| < 1$ を満たす。

したがって、もとの無限等比級数の

$$\text{初項は } \frac{4}{3}, \text{ 公比は } -\frac{1}{3} \quad \text{答}$$

教 p.68

9. 次の2つの条件[1], [2]をとともに満たす2次関数 $f(x)$ を求めよ。

$$[1] \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2 - 1} = 2$$

$$[2] \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1} = -1$$

指針 極限值から係数の決定 $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおく。条件[1]で a の値が求められる。条件[2]から、 $x \rightarrow 1$ のとき、分母 $\rightarrow 0$ であるから、極限值が存在するためには、分子 $\rightarrow 0$ でなければならない。

解答 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) とおくと

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = a$$

であるから、条件[1]より $a = 2 \quad \cdots \cdots \text{①}$

また、条件[2]において、 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0$ であるから

← 分母 $\rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \quad \text{すなわち} \quad f(1) = 0$$

← 分子 $\rightarrow 0$

$$\text{よって} \quad a + b + c = 0 \quad \text{① から} \quad c = -b - 2 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$$\begin{aligned} \text{このとき} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + bx - b - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x^2 - 1) + b(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(2x + b + 2)}{(x + 1)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + b + 2}{x + 1} = \frac{b + 4}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに、条件[2]から} \quad \frac{b + 4}{2} = -1$$

$$\text{よって} \quad b = -6 \quad \text{また、② から} \quad c = -(-6) - 2 = 4$$

したがって、求める2次関数は $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$ 答

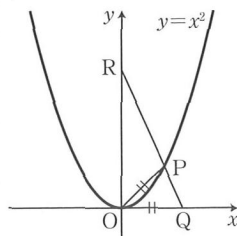
注意 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2-1} = -1$ と $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2-1) = 0$ から

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x)}{x^2-1} \cdot (x^2-1) \right\} = (-1) \cdot 0 = 0$$

よって、 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ であることは必要条件であるが、これから、例えば c を b で表して、等式を満たす b, c の値を求め、関数 $f(x)$ の存在を確認することによって十分性が示されているとみることができる。

教 p.68

10. 放物線 $y=x^2$ 上の点 P に対して、 x 軸上の正の部分に $OP=OQ$ である点 Q をとり、直線 PQ が y 軸と交わる点を R とする。P が第 1 象限にあって原点 O に限りなく近づくとき、R が近づいていく点の座標を求めよ。



指針 点の極限の位置の座標 点 P の座標を (t, t^2) として点 Q の座標を t で表す。さらに、直線 PQ の方程式から点 R の座標を t で表し、 $t \rightarrow +0$ として極限を求める。

解答 点 P の x 座標を t とすると、点 P の座標は (t, t^2) とおける。ただし、点 P は第 1 象限にあるから $t > 0$

$$\begin{aligned} OQ &= OP = \sqrt{t^2 + (t^2)^2} \\ &= t\sqrt{1+t^2} \end{aligned}$$

であるから、点 Q の座標は

$$(t\sqrt{1+t^2}, 0)$$

直線 PQ の方程式は

$$y - t^2 = \frac{0 - t^2}{t\sqrt{1+t^2} - t}(x - t)$$

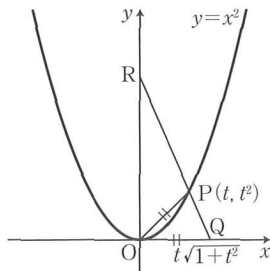
$x=0$ とすると

$$\begin{aligned} y &= \frac{t^3}{t\sqrt{1+t^2} - t} + t^2 = \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2} - 1} + t^2 \\ &= \frac{t^2(\sqrt{1+t^2} + 1)}{(\sqrt{1+t^2} - 1)(\sqrt{1+t^2} + 1)} + t^2 = 1 + t^2 + \sqrt{1+t^2} \end{aligned}$$

よって、点 R の座標は $(0, 1 + t^2 + \sqrt{1+t^2})$

ここで、 $\lim_{t \rightarrow +0} (1 + t^2 + \sqrt{1+t^2}) = 1 + 1 = 2$

であるから、R が近づいていく点の座標は $(0, 2)$ 答



11. x を実数とするととき、次の問いに答えよ。

(1) 無限等比級数 $x^2 + \frac{x^2}{x^2+1} + \frac{x^2}{(x^2+1)^2} + \cdots + \frac{x^2}{(x^2+1)^{n-1}} + \cdots$ は収束することを示せ。

(2) (1) の無限級数の和を $f(x)$ とするとき、関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。

(3) (2) の関数 $f(x)$ が不連続となる x の値を求めよ。

指針 無限等比級数と関数の連続性 与えられた級数は、初項が x^2 で公比が $\frac{1}{x^2+1}$ の無限等比級数である。無限等比級数は、初項 $=0$ のとき、または、初項 $\neq 0$ で $|\text{公比}| < 1$ のとき収束して和をもつ。

したがって、 $x=0$ と $x \neq 0$ の場合に分けて調べる。

解答 (1) $x^2 + \frac{x^2}{x^2+1} + \frac{x^2}{(x^2+1)^2} + \cdots + \frac{x^2}{(x^2+1)^{n-1}} + \cdots$ ①

① は、初項が x^2 、公比が $\frac{1}{x^2+1}$ の無限等比級数である。

$x=0$ のとき、① は収束する。

$x \neq 0$ のとき、 x は実数より $0 < \frac{1}{x^2+1} < 1$ であるから、① は収束する。

よって、無限等比級数 ① は収束する。 **終**

(2) $x=0$ のとき $f(x)=0$

$x \neq 0$ のとき

$$f(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{x^2+1}} = \frac{x^2(x^2+1)}{(x^2+1)-1} = x^2+1$$

以上から $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & (x \neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$

よって、関数 $y=f(x)$ のグラフは図のようになる。

(3) $x \neq 0$ のとき、 $f(x)=x^2+1$ であり、これは

$x \neq 0$ において連続である。また、

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2+1) = 1, \quad f(0) = 0 \text{ より、}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0) \text{ である。よって、関数 } f(x) \text{ が}$$

不連続となる x の値は $x=0$ **答**

